Partie I - QCM

Question 1. On peut réecrire $A =]0; \frac{1}{2}]$, donc
$$\mathrm{Inf}(A) = 0.$$

Question 2. Puisque $\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ ne peut prendre que les valeurs -1, 0 et 1, les seules limites possibles pour les sous-suites de b_n sont -1, 1 et 3. Donc
$$\liminf_{n\to\infty} b_n = -1 \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = 3.$$

Question 3. Nous pouvons exclure $z = 0$ où l'équation n'est pas définie. Elle se réecrit
$$|z| = \frac{z^3}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}.$$
En passant au module des deux côtés de l'équation,
$$||z|| = \left|\frac{z^3}{4e^{i\frac{\pi}{3}}}\right| \iff |z| = \frac{|z|^3}{4} \iff |z|^2 = 4 \iff |z| = 2,$$
où on a utilisé le fait que $|z|$ est un nombre réel positif, donc est égal à son propre module, ainsi que $|e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1$.

Question 4. Intuitivement facile à voir avec un dessin : le suprémum de l'union de deux ensembles est le plus grand parmi les deux suprémа.
Preuve rigoureuse : montrons que $\mathrm{Sup}(A\cup B) = \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\}$ avec une double inégalité.

($\leq$) Pour $x \in A \cup B$, nous avons
$$x \in A\cup B \implies \begin{cases} x \in A \\ \text{et } x \in B \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq \mathrm{Sup}(A) \\ \text{et } x \leq \mathrm{Sup}(B) \end{cases} \implies x \leq \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\}.$$
Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $x \in A\cup B$, on a donc que $\max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\}$ est un majorant de $A \cup B$, et donc
$$\mathrm{Sup}(A \cup B) \leq \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\}.$$

($\geq$) Pour $x \in A$, nous avons
$$x \in A \implies x \in A \cup B \implies x \leq \mathrm{Sup}(A \cup B).$$
Ainsi, $\mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Sup}(A\cup B)$. Nous montrons de la même manière que $\mathrm{Sup}(B) \leq \mathrm{Sup}(A\cup B)$, d'où
$$\begin{cases} \mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Sup}(A \cup B) \\ \text{et } \mathrm{Sup}(B) \leq \mathrm{Sup}(A \cup B) \end{cases} \implies \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\} \leq \mathrm{Sup}(A \cup B).$$

Pour conclure,
$$\begin{cases} \mathrm{Sup}(A \cup B) \leq \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\} \\ \text{et} \\ \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\} \leq \mathrm{Sup}(A \cup B) \end{cases} \implies \mathrm{Sup}(A \cup B) = \max\{\mathrm{Sup}(A); \mathrm{Sup}(B)\}.$$

Question 5. Montrons directement que la série est absolument convergente, ce qui donnera automatiquement la convergence simple. En vue d'appliquer le critère de comparaison, nous procédons par extraction de la puissance dominante du dénominateur :
$$\frac{1}{\sqrt{k^3 - k}} = \frac{1}{k^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 1/k^2}} \leq 2 \cdot \frac{1}{k^{3/2}}.$$
Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $k \geq 2$, nous appliquons le critère de comparaison avec $p = 3/2 > 1$, et donc la série converge absolument.

Question 6. Par extraction de la puissance dominante,

$$\lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n^2+1}-n) = \lim_{n\to\infty} n\cdot(2\sqrt{1+1/n^2}-1) = +\infty\cdot 1 = +\infty.$$

Donc

$$\lim_{n\to\infty} e^{2\sqrt{n^2+1}-n} = e^{+\infty} = +\infty.$$

Question 7. En reécrivant la suite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{1+n}\cdot\sin(n^2)+\frac{2}{1+n}\right) = 3\cdot\lim_{n\to\infty}\sin(n^2)+0.$$

Or $\sin(n^2)$ oscille dans $[-1;1]$, donc a_n oscille dans $[-3;3]$. Elle est divergente et non-bornée.

Question 8. En vu de l'application du critère de d'Alembert, nous avons

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{e^{\lambda(n+1)}}{(n+1)^{\lambda+1}}\cdot\frac{n^{\lambda+1}}{e^{\lambda n}} = e^{\lambda}\cdot\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\lambda+1}}_{\to 1} \to e^{\lambda}.$$

Si $\lambda<0$, alors $e^{\lambda}<1$ ce qui assure la convergence. Pour finir, une vérification rapide du cas extrême $\lambda=0$ correspond à la série harmonique qui diverge.
En conclusion, la série converge si et seulement si $\lambda\ \in\ ]-\infty;0[$.

Partie II - Vrai ou Faux

Question 9. VRAI
Intuitivement, on peut facilement voir avec un dessin que si un ensemble est translaté de c, alors le supremum est aussi translaté de c, c'est à dire

$$\mathrm{Sup}\{x+c : x\in A\} = \mathrm{Sup}(A)+c.$$

Ceci peut se démontrer rigoureusement avec une double inégalité comme pour la question 4.
Ainsi,

$$\mathrm{Sup}\{x+c : x\in A\} - \mathrm{Sup}\{x+c : x\in b\} = (\mathrm{Sup}(A)+c)-(\mathrm{Sup}(B)+c) = \mathrm{Sup}(A)-\mathrm{Sup}(B).$$

Question 10. FAUX
Il vaut toujours la peine de tester ce genre de propositions avec la série harmonique. En choisissant $a_n=\sqrt{n+2}$ et $b_n=n+2$, nous avons

$$\begin{cases} 0<a_n<b_n,\ \forall\ n\in\mathbb{N} \\ \text{et} \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ = \ \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n} \text{ diverge} \\ \text{et} \\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{b_n} \ = \ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} \text{ diverge .}\end{cases}$$

Question 11. FAUX
En devinant ici une limite exponentielle, nous testons la proposition sur $\lambda=1$, ce qui donne

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e\neq 0.$$

Question 12. FAUX
Il suffit de prendre la suite $a_n = 3+\frac{1}{n+1}$ qui est à la fois strictement supérieure à 3 et qui converge vers 3, ce qui implique

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

Question 13. FAUX
Le polynôme est à coefficients réels. Par le théorème fondamental de l'analyse, ses racines doivent soit être réelles, soit venir par paires de nombres complexes conjugués, ce qui n'est pas le cas ici car $1+i$ est racine, mais $1-i$ ne l'est pas.